

几个三角形波导的振幅分布函数*

林 为 干

提 要

对于等边三角形,等腰直角三角形及一内角为 30° 的直角三角形截面波导,本文求出了它们的振幅分布函数,并给出了这些波导的所有正规波型。

一、引 言

对于任意截面的理想直波导,如传播方向是沿直角坐标的 z 轴,则对于 TM 场及 TE 场,我们有

$$\nabla_t^2 E_z + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) E_z = 0, \quad (1)$$

$$E_z|_c = 0; \quad (2)$$

$$\nabla_t^2 H_z + (\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon) H_z = 0, \quad (3)$$

$$\left. \frac{\partial H_z}{\partial n} \right|_c = 0, \quad (4)$$

其中 c 是波导的截面曲线, n 是此曲线上的外向法线,如所周知,取 E_z 或 H_z 作为 U ,我们都得到

$$\chi^2 = \gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon = \frac{\int_S \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right] dS}{\int_S U^2 dS}. \quad (5)$$

此式总是正的。故对于任意截面的波导, TE 波及 TM 波的一些解总是存在的。

对于矩形、圆柱、椭圆柱及抛物柱的波导, TE 波及 TM 波的准确的解已经得到了。对于几个比较正规的三角形截面波导,如等边三角形、等腰直角三角形及一内角为 $\pi/3$ 的直角三角形的解,则除等边三角形的通解是由 Schelkonoff 给出外^[1],其他几个情形的解还不完全,故在此给以补充。

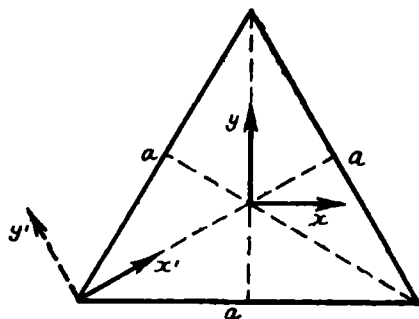


图 1

二、等边三角形波导

对于正三角形波导, Schelkonoff 只给出解的结果,本文给出这个结果的推导。

取边长为 a 的正三角形的中点为原点, x 轴平行于底边,如图 1,令此正三角形的高为 h ,内切圆的半径为 b ,则

* 本文于 1963 年 11 月收到。

$$h = \frac{\sqrt{3}}{2} a = 3b.$$

现将坐标平移及转动成 x', y' , 使 x' 沿一高取向, 对于 TM 波我们试取 E_x 如下:

$$E_x = \sin \frac{l\pi x'}{3b} \cos \frac{p\pi y'}{3\sqrt{3}b} + \sin \frac{m\pi x'}{3b} \cos \frac{q\pi y'}{3\sqrt{3}b} + \sin \frac{n\pi x'}{3b} \cos \frac{r\pi y'}{3\sqrt{3}b}, \quad (6)$$

以使在 $x' = 3b$ 处 $E_x = 0$ 及使 E_x 对 x' 对称, 设 l, m, n, p, q 及 r 均为整数, 其中我们取 $y'/3\sqrt{3}b$ 的写法是为了以下求 TE 波情形的解时的方便. 现将其他两边上的边界条件应用于(6)式, 即

$$E_x|_{y'=\pm x'/\sqrt{3}} = 0,$$

令 $\xi = \frac{\pi x'}{3b}$, 故得

$$\begin{aligned} \sin\left(l + \frac{p}{3}\right)\xi + \sin\left(l - \frac{p}{3}\right)\xi + \sin\left(m + \frac{q}{3}\right)\xi + \sin\left(m - \frac{q}{3}\right)\xi + \\ + \sin\left(n + \frac{r}{3}\right)\xi + \sin\left(n - \frac{r}{3}\right)\xi = 0. \end{aligned}$$

若取:

$$\begin{aligned} l - \frac{p}{3} + m + \frac{q}{3} &= 0, \\ m - \frac{q}{3} + n + \frac{r}{3} &= 0, \\ n - \frac{r}{3} + l + \frac{p}{3} &= 0, \end{aligned}$$

则得下述关系:

$$\left. \begin{aligned} p - q &= 3(l + m), \\ q - r &= 3(m + n), \\ r - p &= 3(n + l). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

由此可见, l, m 及 n 必须满足如下的关系

$$l + m + n = 0. \quad (8)$$

另一方面, (6)式必须满足(1)式, 故应有

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{3b}\right)^2 \left\{ \left(l^2 + \frac{p^2}{3}\right) \sin \frac{l\pi x'}{3b} \cos \frac{p\pi y'}{3\sqrt{3}b} + \left(m^2 + \frac{q^2}{3}\right) \sin \frac{m\pi x'}{3b} \cos \frac{q\pi y'}{3\sqrt{3}b} + \right. \\ \left. + \left(n^2 + \frac{r^2}{3}\right) \sin \frac{n\pi x'}{3b} \cos \frac{r\pi y'}{3\sqrt{3}b} \right\} - \chi^2 E_x = 0. \end{aligned}$$

由此, 我们必须有

$$l^2 + \frac{p^2}{3} = m^2 + \frac{q^2}{3} = n^2 + \frac{r^2}{3} \quad (9)$$

及

$$\chi^2 = \left(\frac{\pi}{3b}\right)^2 \left(l^2 + \frac{p^2}{3}\right). \quad (10)$$

由(7)式及(9)式即可解出:

$$p = m - n, \quad q = n - l, \quad r = l - m. \quad (11)$$

回到(6)式, 因为

$$\left. \begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 2b, \\ y' &= -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y; \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

如果我们采用 Schelkonoff 的三个坐标 u, v 及 w , 即

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \\ v &= -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y, \\ w &= -y, \end{aligned}$$

则(6)式变为 Schelkonoff 的结果:

$$\begin{aligned} E_x &= \sin \frac{2\pi l}{3b} \left(\frac{u}{2} + b \right) \cos \frac{\pi(m-n)(v-w)}{9b} + \\ &+ \sin \frac{2\pi m}{3b} \left(\frac{u}{2} + b \right) \cos \frac{\pi(n-l)(v-w)}{9b} + \\ &+ \sin \frac{2\pi n}{3b} \left(\frac{u}{2} + b \right) \cos \frac{\pi(l-m)(v-w)}{9b}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$l + m + n = 0,$$

$$x = \frac{2\pi}{3b\sqrt{3}} \sqrt{m^2 + mn + n^2} = \frac{4\pi}{3a} \sqrt{m^2 + mn + n^2}. \quad (14)$$

对于 TE 波, 试取

$$H_x = \cos \frac{l\pi x'}{3b} \cos \frac{p\pi y'}{3\sqrt{3}b} + \cos \frac{m\pi x'}{3b} \cos \frac{q\pi y'}{3\sqrt{3}b} + \cos \frac{n\pi x'}{3b} \cos \frac{r\pi y'}{3\sqrt{3}b}. \quad (15)$$

可见在边 $x' = 3b$ 上, $\frac{\partial H_x}{\partial x'} = 0$; 而在其他两个边 $y' = \pm \frac{x'}{\sqrt{3}}$ 上, 边界条件要求法线

磁场分量为零, 即要求 $\pm \cos 30^\circ H_{y'} - \sin 30^\circ H_{x'} = 0$, 亦即

$$y' = \pm \frac{x'}{\sqrt{3}} \text{ 时, } \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial H_x}{\partial y'} - \frac{1}{2} \frac{\partial H_x}{\partial x'} = 0.$$

代入(15)式, 如取 $\xi = \frac{\pi x'}{3b}$, 我们应有

$$\begin{aligned} &p \cos l\xi \sin \frac{p}{3}\xi + q \cos m\xi \sin \frac{q}{3}\xi + r \cos n\xi \sin \frac{r}{3}\xi - \\ &- l \sin l\xi \cos \frac{p}{3}\xi - m \sin m\xi \cos \frac{q}{3}\xi - n \sin n\xi \cos \frac{r}{3}\xi = 0, \end{aligned}$$

亦即

$$\begin{aligned} & p \left\{ \sin\left(\frac{p}{3} + l\right) \xi + \sin\left(\frac{p}{3} - l\right) \xi \right\} + q \left\{ \sin\left(\frac{q}{3} + m\right) \xi + \sin\left(\frac{q}{3} - m\right) \xi \right\} + \\ & + r \left\{ \sin\left(\frac{r}{3} + n\right) \xi + \sin\left(\frac{r}{3} - n\right) \xi \right\} - l \left\{ \sin\left(\frac{p}{3} + l\right) \xi - \sin\left(\frac{p}{3} - l\right) \xi \right\} - \\ & - m \left\{ \sin\left(\frac{q}{3} + m\right) \xi - \sin\left(\frac{q}{3} - m\right) \xi \right\} - \\ & - n \left\{ \sin\left(\frac{r}{3} + n\right) \xi - \sin\left(\frac{r}{3} - n\right) \xi \right\} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

不难看出,如我們取以下的关系式,(16)式即成立:

$$\begin{aligned} \frac{p}{3} - l &= m + \frac{q}{3}, \\ \frac{q}{3} - m &= n + \frac{r}{3}, \\ \frac{r}{3} - n &= l + \frac{p}{3}. \end{aligned}$$

因而(8)式成立,而且(16)式变为

$$\begin{aligned} & (p + q + l - m) \sin\left(\frac{p}{3} - l\right) \xi + (q + r + m - n) \sin\left(\frac{q}{3} - m\right) \xi + \\ & + (r + p + n - l) \sin\left(\frac{r}{3} - n\right) \xi = 0. \end{aligned}$$

由此令: $p + q + l - m = q + r + m - n = r + p + n - l = 0$, 則这些关系式与(9)式給出相容的解,我們又得到(11)式的关系,故最后将(11)式代入(15)式,我們得到

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \cos \frac{2\pi l}{3b} \left(\frac{u}{2} + b \right) \cos \frac{\pi(m-n)(v-w)}{9b} + \\ &+ \cos \frac{2\pi m}{3b} \left(\frac{u}{2} + b \right) \cos \frac{\pi(n-l)(v-w)}{9b} + \\ &+ \cos \frac{2\pi n}{3b} \left(\frac{u}{2} + b \right) \cos \frac{\pi(l-m)(v-w)}{9b}, \\ l + m + n &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

及(14)式.

对于(17)式,最低的波型是 $l=0, m=-n=1$ 或 $m=0, n=-l=1$ 或 $n=0, m=-l=1$, 此时

$$x = \frac{4\pi}{3a}, \quad \lambda_c = 1.5a. \quad (18)$$

当輪換 u, v, w 坐标时,我們即得到一个三重簡并的情形,在上一期的学报上^[3],我們可以看到利用这三重簡并波的滤波器报告. 而对于 TM 波的(13)式, l, m, n 均不能为零,否則(13)式取恆零值,因此最低的 TM 波为 $l=-2, m=n=1$, 故

$$x = \frac{4\pi}{a\sqrt{3}}, \quad \lambda_c = 3b = h.$$

三、一内角为 $\pi/3$ 的直角三角形波导

現取高为 h 的一内角为 $\pi/3$ 的直角三角形, 如将坐标点放在一顶点, x 軸沿长边取向, 如图 2 所示. 对于这种波导的 TE 波, 利用 (15) 式即得

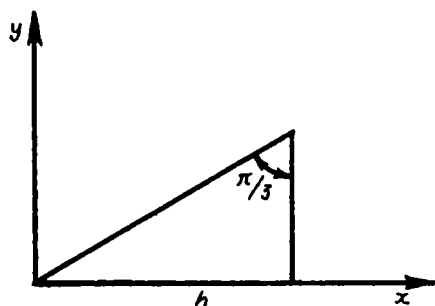


图 2

$$H_z = \cos \frac{l\pi x}{h} \cos \frac{(m-n)\pi y}{\sqrt{3}h} + \cos \frac{m\pi x}{h} \cos \frac{(n-l)\pi y}{\sqrt{3}h} + \cos \frac{n\pi x}{h} \cos \frac{(l-m)\pi y}{\sqrt{3}h}, \quad (19)$$

$$l + m + n = 0. \quad (20)$$

不难证明 (19) 式及 (20) 式给出正确的解, 而且

$$\chi = \frac{2\pi}{\sqrt{3}h} \sqrt{m^2 + mn + n^2}, \quad (21)$$

其中 l, m 及 n 中只能有一个取零值.

对于 TM 波, 我們試取

$$E_z = \sin \frac{l\pi x}{h} \sin \frac{(m-n)\pi y}{\sqrt{3}h} + \sin \frac{m\pi x}{h} \sin \frac{(n-l)\pi y}{\sqrt{3}h} + \sin \frac{n\pi x}{h} \sin \frac{(l-m)\pi y}{\sqrt{3}h}, \quad (22)$$

$$l + m + n = 0. \quad (23)$$

可見在 $x=0$ 及 $y=0$ 时 $E_z=0$, 在弦上 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, 如令 $\xi = \frac{\pi x}{h}$, 則 (21) 式变为

$$E_z|_{y=\frac{x}{\sqrt{3}}} = -\frac{1}{2} \left\{ \cos \xi \left(l - \frac{m-n}{3} \right) - \cos \xi \left(l + \frac{m-n}{3} \right) + \cos \xi \left(m - \frac{n-l}{3} \right) - \cos \xi \left(m + \frac{n-l}{3} \right) + \cos \xi \left(n - \frac{l-m}{3} \right) - \cos \xi \left(n + \frac{l-m}{3} \right) \right\} = 0.$$

可見 (22) 式就是所需的 TM 场的电场纵向分量. 在 l, m 及 n 中的任一个都不能取零值, 否則 E_z 全等于零. $\chi = \frac{2\pi}{\lambda_c}$ 則仍由 (21) 式给出.

四、等腰直角三角形

对于等腰三角形中的 TE 波函数, 我們將应用矩形波导的分割方法来得到. 由图 3, 設已知边为 a, b 的矩形波导的磁场纵向分量为

$$H_x = \cos \frac{m\pi y}{a} \cos \frac{n\pi x}{b}, \quad \lambda_c = 2 / \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2},$$

现将坐标轴转 45° , 得到

$$u = \frac{x+y}{\sqrt{2}},$$

$$v = \frac{x-y}{\sqrt{2}}.$$

再求在 $u = \text{const}$ 及 $v = \text{const}$ 上磁场法线分量为零的条件。不难看出在 $u = \text{const}$ 时, 磁场法线分量 H_n 为

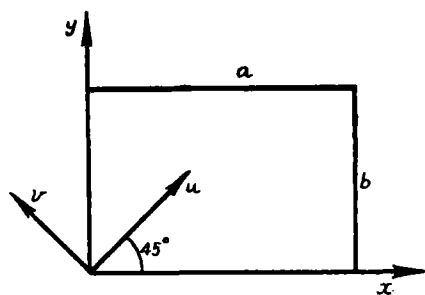


图 3

$$H_n|_{u=\text{const}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{m}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \left(\frac{n\pi\sqrt{2}u}{b} - \frac{n\pi x}{b} \right) + \frac{n}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \left(\frac{n\pi\sqrt{2}u}{b} - \frac{n\pi x}{b} \right) \right].$$

如 $\frac{m}{a} = \frac{n}{b}$, $u = p \frac{b/n}{\sqrt{2}}$, $p = 0, 1, 2, \dots$, 则上式取零值。同样地,

$$H_n|_{v=\text{const}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{m}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \cos \left(\frac{n\pi v}{b/\sqrt{2}} - \frac{n\pi x}{b} \right) - \frac{n}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \left(\frac{n\pi x}{b} - \frac{n\pi v}{b/\sqrt{2}} \right) \right].$$

如 $\frac{m}{b} = \frac{n}{b}$, $v = q \frac{b/n}{\sqrt{2}}$, $q = 0, 1, 2, \dots$, 则上式取零值。

我们可取下式作为等腰直角三角形的波函数:

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{m\pi y}{a} = \cos \frac{m\pi(u+v)}{\sqrt{2}a} \cos \frac{m\pi(u-v)}{\sqrt{2}a}, \\ \lambda_c &= \frac{\sqrt{2}a}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

而等腰直角三角形则是由 $x = p \frac{a}{m}$, $y = q \frac{a}{m}$, $u = p \frac{a/m}{\sqrt{2}}$, $v = q \frac{a/m}{\sqrt{2}}$ 中的任意三条直线所围成的三角形。为确定起见, 让我们取三边为:

(甲) $x = 0$, $y = q \frac{a}{m}$, $v = 0$, 如图 4 所示, 则弦上的高 $h = q \frac{a}{m} / \sqrt{2}$; 由 (24) 式, 故得到

$$\left. \begin{aligned} H_x &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{q\pi u}{h} + \cos \frac{q\pi v}{h} \right], \\ \lambda_c &= \frac{2h}{q}, \quad q = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

(乙) 取三边为 $y = 0$, $v = 0$, $u = p \frac{a}{m\sqrt{2}}$, $h = \frac{p}{2} \frac{a}{m}$; 由 (24) 式, 可得 (见图 5)

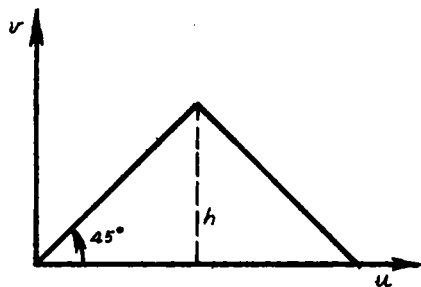


图 4

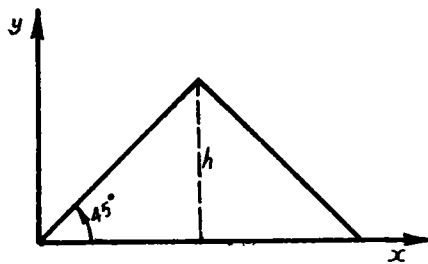


图 5

$$\left. \begin{aligned} H_z &= \cos \frac{p\pi x}{2h} \cos \frac{p\pi y}{2h}, \\ \lambda_c &= \frac{2\sqrt{2}h}{p}, \quad p = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

由图 6 的正方形波导中的 TE_{zz} 场结构图可见, 以上的(甲),(乙)两种取法已把等腰直角三角形中所有可能的 TE 场型计算在内。还可见当 $p = 1$ 时 (26) 式给出基本的场结构图, 即所有的场型图都可由这种小等腰直角三角形内的场图的迭加得出。

现在我们可以把最后的结果写成:

$$\left. \begin{aligned} H_z &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{m\pi x}{h} + \cos \frac{m\pi y}{h} \right], \\ \lambda_c &= \frac{2h}{m}; \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} H_z &= \cos \frac{n\pi x}{2h} \cos \frac{n\pi y}{2h}, \\ \lambda_c &= \frac{2\sqrt{2}h}{m} = \frac{2a}{m}. \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

其中 h 及 $a = \sqrt{2}h$ 分别是等腰三角形的弦上的高及边长, 坐标原点在一顶点, 而 x 轴则沿弦取向, 如图 6 所示。

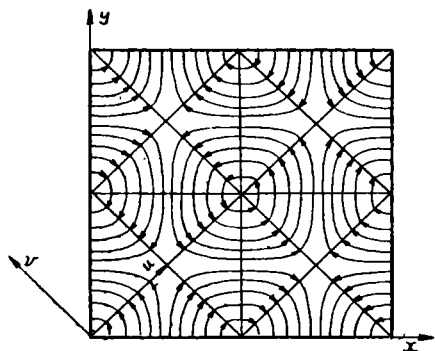


图 6

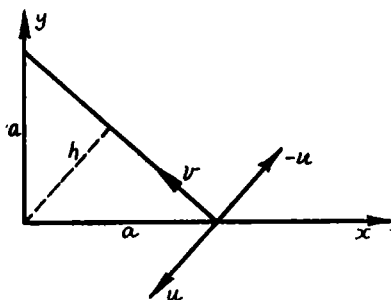


图 7

对于此等腰直角三角形波导中的 TM 场, 我们试从正方形波导的两个不同的 TM 场的迭加来组成, 试取如图 7 的坐标系及

$$E_x = \sin \frac{l\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a} + \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{p\pi y}{a}, \quad (29)$$

则为了满足(1)式, 我们应有

$$K^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (l^2 + m^2) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (n^2 + p^2). \quad (30)$$

由(29)式, 在边 $x = 0, y = 0$ 上, $E_x = 0$; 而在弦上, $x + y = a$; 如取 $\xi = \frac{\pi x}{a}, \eta = \frac{\pi y}{a}$,

则 $\xi + \eta = \pi$, 因而(29)式给出

$$\begin{aligned} E_x|_{x+y=a} &= \sin l\xi \sin(m\pi - m\eta) + \sin n\xi \sin(p\pi - p\eta) \\ &= \frac{(-1)^{m+1}}{2} [\cos(l-m)\xi - \cos(l+m)\xi + \\ &\quad + (-1)^{p-m} \{\cos(n-p)\xi - \cos(n+p)\xi\}]. \end{aligned} \quad (31)$$

因原已设 p 及 m 皆为整数, 故自然可取 r 为正整数:

$$p - m = r. \quad (32)$$

则由(30)式与(32)式, 即可得到

$$p + m = \frac{l-n}{r} (l+n).$$

若又取

$$l - n = r, \quad (33)$$

则

$$l - m = -(n - p), \quad (34)$$

故由(32)式与(33)式之差及由(34)式可见, (31)式取零值, 如 r 是奇数, 则 $m = n$. 故最后我们得到等腰直角三角形中的 E_x 为

$$\begin{aligned} E_x &= \sin(m + 2n - 1) \frac{\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{a} + \\ &\quad + \sin \frac{m\pi x}{a} \sin(m + 2n - 1) \frac{\pi y}{a}, \end{aligned} \quad (35)$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots$$

既然我们的出发点(29)式包含了所有的 TM 波型, 故满足边界条件的(35)式亦包含等腰直角三角形波导中的所有的 TM 波型. 此时截止波数为

$$x = \frac{2\pi}{\lambda_c} = \frac{\pi}{a} \sqrt{m^2 + (m + 2n - 1)^2}. \quad (36)$$

如我们将 x, y 坐标转动及平移至如图 7 所示的 u, v 坐标, 然后再将 u, v 换成 x, y , 则(35)式可写成

$$\begin{aligned} E_x &= (-1)^{m+1} \left[\sin \frac{(m + 2n - 1)\pi(x - y)}{\sqrt{2}a} \sin \frac{m\pi(x + y)}{\sqrt{2}a} - \right. \\ &\quad \left. - \sin \frac{m\pi(x - y)}{\sqrt{2}a} \sin \frac{(m + 2n - 1)\pi(x + y)}{\sqrt{2}a} \right], \end{aligned} \quad (37)$$

$$m, n = 1, 2, 3, \dots$$

此(37)式所用的坐标 x, y 即如图 4 所示.

結 束 語

这里所討論的波导还未得到很大的用处,但特种波导的研究,在长距离波导通訊的圓波导 H_{01} 波技术中已受到重視,例如,有人研究十字形波导^[2]代替圓波导 H_{01} 波型的某些用途的可能性,如果对十字形波导进行分割,即可得到梯形截面波导. 如果我們在图 6 上,取 $v = 0$, $u = p \frac{a}{m}$, $x = 2p \frac{a}{m}$, $y = 0$ 平面所围成的波导,即得到一个內角为 45° 的等腰梯形波导之半,此时在 TE 場中有一些具有如下的分布函数:

$$H_x = \cos \frac{p\pi x}{l} \cos \frac{p\pi y}{l}, \quad \lambda_c = \frac{\sqrt{2} l}{p}, \quad p = 1, 2, 3, \dots$$

其中 $2l$ 为梯形上底的长度,高为 l ,等腰,內角为 45° . 这样的一个事实可作为計算梯形波导时的一个参考或核对标准.

其他的結果除使我們現有的資料更为丰富外,亦可能找到其他的实际用途. 对正三角形波导中的三重簡并型場作为单腔多波型滤波器中的場型的可能性我們已进行过研究^[3].

参 考 文 献

- [1] S. A. Schelkonoff, 电磁波, 廖世靜譯, 人民邮电出版社, 1962, p. 393.
- [2] А. Я. Яшкин, Радиотехника, т. 17, № 12 (1962), 38.
- [3] 林为干, 曾令儒, 电子学报, 1964, 第二期.

AMPLITUDE DISTRIBUTION FUNCTIONS OF SOME TRIANGULAR WAVE GUIDES

LIN WEI-GUAN

ABSTRACT

The amplitude distribution functions of wave guide of equilateral triangular, isosceles right-triangular and 30° right-triangular cross-section are given, and thus all the normal modes of such wave guide are obtained.